**Tema 3.1.3. Distribución Hipergeométrica.**

**Motivación del tema.** Para evitar que lo descubran en la aduana, un viajero ha colocado 6 tabletas de narcóticos en una botella que contiene 9 píldoras de vitaminas que son similares en apariencia. Si el oficial de la aduana selecciona 6 tabletas aleatoriamente para analizarlas, ¿cuál es la probabilidad de que el viajero sea arrestado por posesión de narcóticos?

Sacamos una muestra de 6 tabletas

y separamos las tabletas en 2 categorías,

las que son de droga y las que son de vitaminas.

Tabletas de droga Tabletas de vitaminas

Así la probabilidad de obtener 4 tabletas de droga y 2 de vitaminas es

Basta con que le encuentren al viajero al menos una tableta con droga para que sea arrestado, entonces la probabilidad de que en las seis tabletas seleccionadas por el oficial haya al menos una tableta con droga es

+

lo cual nos muestra que es sumamente riesgoso.

**Definición 1. Experimento Hipergeométrico.** Para tener un experimento hipergeométrico se deben tener:

* Una población de tamaño .
* Hay elementos en la población considerados como *éxitos.*
* Hay elementos en la población considerados como *fracasos.*
* Los ensayos consisten en extraer, sin reemplazo, de la población una muestra de tamaño y checar cuántos *éxitos* tiene la muestra. Observe que el número de fracasos es .

**Definición 2. Distribución Hipergeométrica.** Una variable aleatoria tiene una distribución hipergeométrica con parámetros y si su función de densidad es de la forma

donde

probabilidad de que la muestra de tamaño contenga *éxitos.*

tamaño de la muestra.

tamaño de la población.

número de elementos en la población considerados como *éxitos.*

número de elementos en la población considerados como *fracasos.*

**Propiedades de la Distribución Hipergeométrica.**



**Ejemplo 1. Aplicación al Control de Calidad.** Una empresa fabrica fusibles que empaca en cajas de 12 unidades cada una. Un inspector selecciona al azar 3 de los 12 fusibles de una caja para inspeccionarlos. Si la caja contiene exactamente 5 fusibles defectuosos, ¿cuál es la probabilidad de que el inspector encuentre 1 fusible defectuoso de los 3? ¿Cuál es la probabilidad de hallar por lo menos 1 fusible defectuoso?

**Solución.** La función de densidad es

Observe que solo toma valores entre 0 y 3. La gráfica de la función de densidad hipergeométrica con estos parámetros aparece en la Fig. 1.

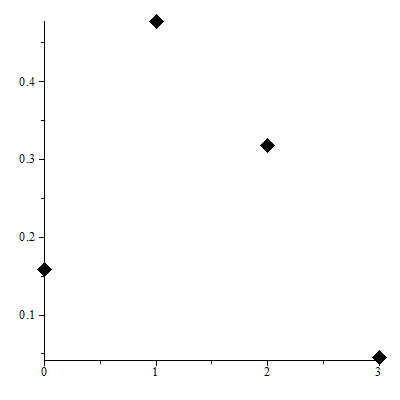


Fig. 1

La probabilidad de hallar defectuoso es

Ahora suponga que desea conocer la probabilidad de hallar por lo menos un fusible defectuoso. En lugar de calcular

calculamos . Como

Se concluye que la probabilidad de hallar por lo menos un fusible defectuoso debe ser .

**Ejemplo 2.** Se formó un jurado de 6 personas de un grupo de 20 posibles miembros, de los cuales 8 eran negros y 12 eran blancos. El jurado se selecciono aleatoriamente, pero sólo contenía a un miembro negro. ¿Tiene usted algún motivo para dudar de la aleatoriedad de la selección?

**Solución.** Supongamos que la variable aleatoria es la que cuenta el número de negros en el jurado, entonces la función de densidad es

Observe que esta función solo está definida para . La gráfica de la función de densidad hipergeométrica para este caso es



Fig. 2

Ahora si calculamos la probabilidad de que el jurado tenga sólo un negro obtenemos

Como esta probabilidad es muy baja, si tenemos justificación para dudar de la aleatoriedad de la selección. Además observando la Fig. 2, es más razonable que el jurado tenga 2 o 3 negros, pues en estos puntos la probabilidad es más alta.

**Teorema 1. La Distribución Hipergeométrica es una Función de Densidad.**

**Demostración.** Consideremos la igualdad

Utilizando la fórmula del Binomio de Newton podemos escribir:

Ahora en el primer miembro multipliquemos el sumando de la primer suma cuando con el sumando de la segunda suma cuando , para entonces obtenemos:

Ahora en el segundo miembro tomamos el sumando correspondiente a

Entonces los coeficientes de deben ser iguales en los 2 miembros de la ecuación

**Teorema 2. Propiedades de la Distribución Hipergeométrica.**

|  |  |
| --- | --- |
| Esperanza |  |
| Varianza |  |

**Demostración.** Demostraremos la fórmula de la esperanza. Como sabemos

Donde se ha sacado de la sumatoria porque no depende de . Después cancelamos una , sacamos una y cambiamos la suma desde 1(y no 0) obtenemos

Ahora en la sumatoria hacemos el cambio de variable y observando que si cambia de 1 a entonces cambia de 0 a obtenemos

Finalmente a la sumatoria le aplicamos la fórmula del teorema 1, donde se toma como , como , como y como para obtener

donde hemos simplificado los factoriales.

**Ejercicios.**

1. Un problema importante que enfrentan los jefes de personal y otras personas encargadas de ls selección de los mejores de un conjunto de elementos se describe con la siguiente situación. Se seleccionan 10 personas para un trabajo de un grupo de 20 ingenieros con doctorado. ¿Cuál es la probabilidad de que el grupo de los 10 ingenieros seleccionados incluya a los 5 mejores del grupo de 20?

Ayuda: el número de formas de seleccionar a los 5 mejores es 1.

Respuesta: 0.0162

1. Una caja contiene 6 canicas azules y 4 canicas rojas. Se lleva a cabo un experimento en el cual se escoge al azar una canica y se observa su color, pero la canica no se devuelve a la caja. Encuentre la probabilidad de que después de 5 pruebas del experimento, se hayan escogido 3 canicas azules.

Respuesta: 10/21

1. Se van a escoger al azar 13 cartas ( sin reemplazo ) de una baraja común de 52 naipes, encuentre, con la distribución hipergeométrica, la probabilidad de que (a) 6 sean figuras, (b) ninguna sea figura.

Respuesta: (a) 0.0415, (b) 0.0127.

1. Unos biólogos capturan a 10 animales de una especie, los etiquetan y los liberan. Después de un periodo seleccionan una muestra aleatoria de 15 animales de este tipo. ¿Cuál es la probabilidad de que 5 de los animales seleccionados estén etiquetados, si hay 25 animales de esta especie en la región?

Respuesta: 0.231